Droites dans le plan

1. Équation cartésienne d'une droite

1.1 Droite définie par deux points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

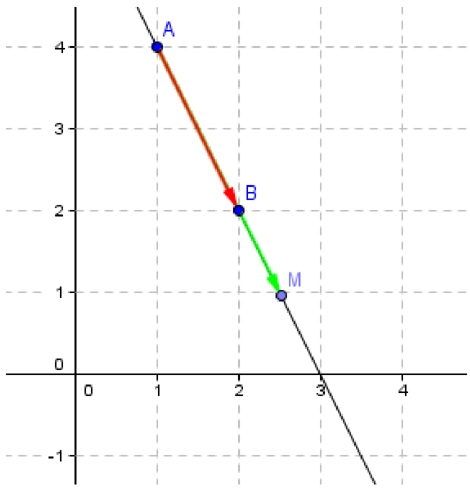
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts du plan et M (x;y) un point quelconque de ce plan.

Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les points A, B et M sont alignés, donc si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

En d'autres termes, (AB) est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

La droite (AB) est définie par $(AB)=\{M(x;y)/\ \vec{AM}\ //\ \vec{AB}\}$.

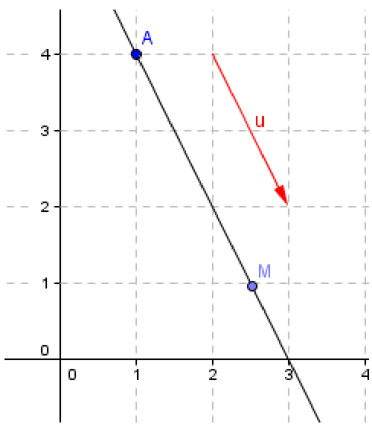
Le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Il donne la direction de la droite.



1.2 Droite définie par un point et un vecteur

Soit $A(x_A;y_A)$ un point et $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ et un vecteur non nul de plan. Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

(D) est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : $(D)=\{M(x;y)/\ \vec{AM}\ //\ \vec{u}\}$



1.3 Équation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit (D) une droite de ce plan.

Un point M(x;y) appartient à la droite (D) si les coordonnées (x;y de M sont liées par une relation de la forme ax + by + c = 0, où a, b et c sont des réels non simultanément nuls.

Cette relation est appelée équation cartésienne de (D).

Réciproquement, soit $(E)=\{M(x;y)/ax+by+c=0\}$ où a, b et c sont des réels non simultanément nuls.

(E) est la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, si a et b ne sont pas simultanément nuls.

Exemples

- 2x -3 y +4 = 0 est l'équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. Cette droite passe par le point A (- 2 ; 0).
- -x +4y + 3 = 0 est l'équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$. La droite passe par le point $A(x_A;y_B)$.

1.4 Détermination d'une équation cartésienne d'une droite

Soit (D) la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

Un point M (x; y) appartient à la droite (D) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$.

Donc M(x ; y) appartient à cette droite si et seulement si $\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0$.

En développant, on obtient la forme ax + by+c = 0.

Si la droite passe par A et B, alors on prend comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exemple

Soit A (1;3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Un point M (x;y) appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ si

2(x-1)-3(y-3)=0.

En développant, on a l'équation de la droite (D) : 2 x -3 y +7 =0.

Soit (D) la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. L'équation de (D) est de la forme ax+by +c = 0, avec $a=\alpha$ et $b=\beta$. De plus, les coordonnées de A vérifient l'égalité. Ainsi, on peut obtenir c en remplaçant x par x_A et y par y_A. On a alors l'équation de la droite.

Reprenons le même exemple (D) : ax + by + c = 0 avec a = 2 et b = -3. En remplaçant x par 1 et y par 3, on a 2(1)-3(3) + c = 0. Ce qui donne c = 7, d'où le résultat.

1.5 vecteur normal à une droite

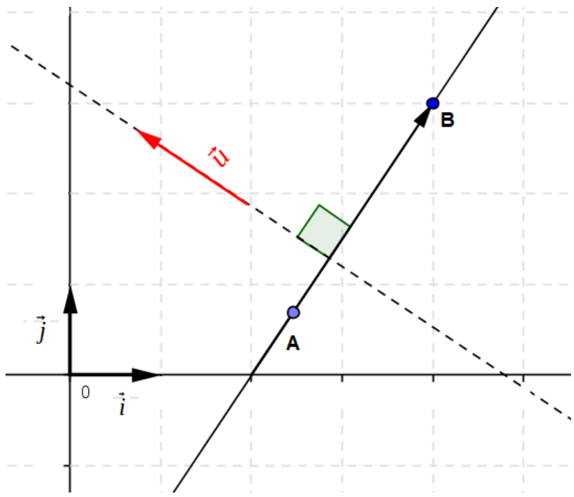
Soit (D) une droite.

On appelle vecteur normal à la droite (D) tout vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de (D).

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Si (D) a pour équation a x + b y +c = 0, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D).

En effet, $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D), et $\vec{n}.\vec{u}=a.(-b)+b.a=0$



2. Équation réduite

2.1 Définition

La pente d'un droite est la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des abscisses.

2.2 Forme générale

L'équation réduite d'une droite est de la forme y = ax + b. a est la pente (ou coefficient directeur) et b l'ordonnée à l'origine (C'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées). (Voir activité)

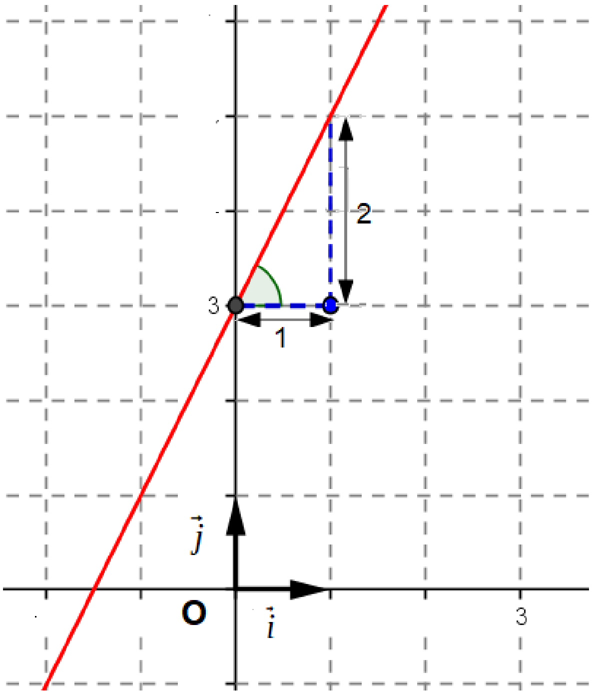
Exemple

(D) : y = 2x + 3

La pente est a = 2 et l'ordonnée à l'origine est b = 3.

2.3 Construction

On peut toujours dresser un tableau de valeur, mais la plus pratique c'est l'utilisation de la pente et de a =2 , que l'on peut écrire $a=\frac{2}{1}$



3. Équation paramétrique d'une droite

Soit (d) une droite passant par un point A ayant comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$.

Un point M appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Don s'il existe un réle k non nul tel que $\overrightarrow{AM}=k.\vec{u}$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Un point $M(x;y)$ appartient à la droite (d) de vecteur directeur et passant par $A(x_0;y_0)$ si et seulement si $\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=k.\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$;

Donc M(x ; y) appartient à (d) si et seulement si $\begin{cases}x=x_0+ka\\y=y_0+kb\end{cases}$: C'est l'équation paramétrique de la droite (d).

Exemples

1. *Donner une équation paramétrique de la droite (d) passant par le point* $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à cette droite si et seulement si $\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}=k.\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. donc l'équation paramétrique de (d) est $\begin{cases}x=1+k\\y=2-k\end{cases}$.

2. *On donne l'équation paramétrique d'une droite (d) :* $\begin{cases}x=-1+2k\\y=1+k\end{cases}$.

Donner une équation cartésienne de cette droite.

On a $\begin{cases}x=-1+2k\\y=1+k\end{cases}$, donc $\begin{cases}k=\dfrac{x+1}{2}\\k=y-1\end{cases}$.

D'où $y-1=\dfrac{x+1}{2}$

Une équation cartésienne de (d) est $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$