# Corrigé problème Bacc série D 2023

**Problème**

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=e^x.\ln(x+1)$ .

1) Soit g la fonction définie par $g(x)=\ln(1+x)+\frac{1}{x+1}$ .

a) g est définie sur $D_g=]-1;+\infty[$ .

*Calcul des limites*

- $\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1)=-\infty$

$\lim_{x\to -1^+}(x+1)=0^+$ donc $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)}=+\infty$ .

On a donc une forme indéterminée.

Levons l'indétermination :

$$g(x)=\frac{(x+1)\ln(1+x)+1}{x+1}$$

Posons X = 1+x. On a si $x\to -1^+$ , alors $X\to 0^+$

$\lim_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x+1)+1=\lim_{X\to 0^+}(X\ln X+1)=1$ , ainsi $\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{X\to 0^+}\frac{(X\ln X+1)}{X}=\lim_{X\to 0^+}\frac{1}{X}$

D'où $\lim_{x\to -1^+} g(x)=+\infty$

- $\lim_{x\to +\infty}\ln(x+1)=+\infty$ et $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{(x+1)}=0$ ,

donc $\lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$

*Dérivée*

g est dérivable sur $D_g=]-1;+\infty[$ ,

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$$

*Signe de la dérivée*

g'(x)= 0 si et seulement si x = 0.

Comme $(x+1)^2>0$ pour tout x > -1, on a g'(x) > 0 si x > 0 et g'(x) < 0 si -1< x < 0

| x | -1 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | ‖ | − | 0 | + | |
| g (x) | ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | 0 |

.

2) D'après l'étude des variations précédente, g admet comme valeur minimale 1, donc $g(x)>0$ pour tout réel x

3) a) $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1) = 0^+$ , donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ .

$\lim\limits_{x \to -1^+} e^{-x} = e^1 = e$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \ln(x+1) + e - x = -\infty$

La courbe de f admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées d'équation x = -1.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x . \ln(x+1) = +\infty$

b) $f(x) = e^x . \ln(x+1)$ . Elle est de la forme u.v, avec u $u = e^x$ et $v = \ln(x+1)$

Alors $f'(x) = e^x . \ln(x+1) + e^x . \dfrac{1}{1+x}$

En mettant $e^x$ en facteur, on a $f'(x) = e^x . [\ln(x+1) + \dfrac{1}{1+x}]$ .

d'où $f'(x) = e^x g(x)$

c) *Tableau de variation de f*

D'après le résultat de 2), g(x) > 0 quel que soit x, et comme $e^x > 0$ , on a f'(x) > 0 quel que soit x appartenant à $]-1; +\infty[$ .

| x | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | ‖ | — | |
| f(x) | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

*Branches infinies*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) . \dfrac{e^x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ , donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Ainsi, la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées en $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x . \ln(x+1) = +\infty$ , donc on a une asymptote verticale d'équation x= -1.

e) *Équation de la tangent à (C ) en $x_0 = 0$*

L'équation en $x_0 = 0$ est y = f'(0) (x-0)+ f(0).

$f'(x)=e^x.\ln(x+1)+e^x.\frac{1}{1+x}$ , donc $f'(0)=e^0.\ln(0+1)+e^0.\frac{1}{1+0}=1$

$f(x)=e^x.\ln(x+1)$ donc $f(0)=e^0.\ln(0+1)=0$

Donc l'équation de la tangente en 0 est y = x

4) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $D_f=]-1;+\infty[$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ , donc f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $f(]-1;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$ .

b) $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ donc $\lim_{x\to -\infty} f^{-1}(x)=-1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ donc $\lim_{x\to +\infty} f^{-1}(x)=+\infty$

On sait que si f est continue et strictement monotone sur I, alors sa réciproque $f^{-1}$ est aussi continue et strictement monotone, et de même sens de variation que f.

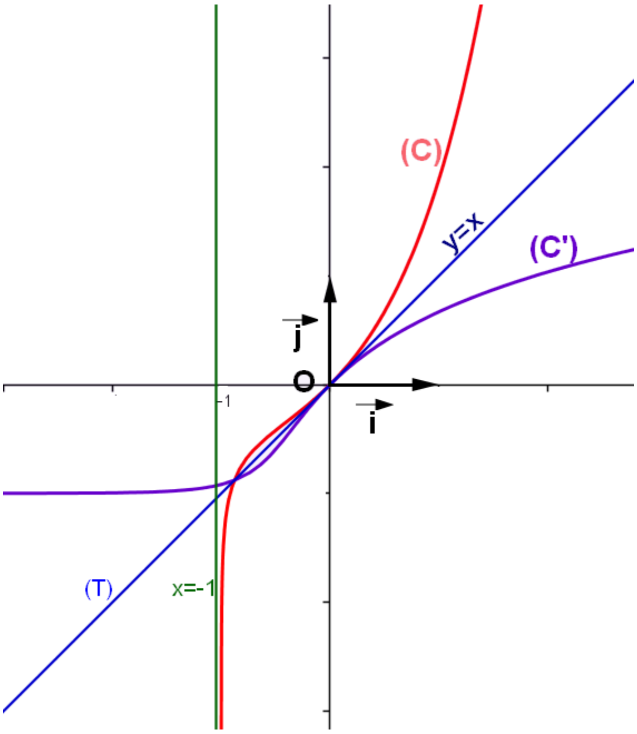
Ainsi le tableau de variation de $f^{-1}$ est

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f^{-1}(x)$ | $-1$ ↗ | $+\infty$ |

c) , f(0) = 0, donc $f^{-1}(0)=0$ .

5. *Courbes*

La courbe (C') est la symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y =x



6. Soit $(I_n)$ la suite définie par $I_n=\int_1^n (2-e^{1-x})dx$ .

On a $I_n=\int_1^n (2-e^{1-x})dx=[2x-(\frac{1}{-1}e^{1-x})]_1^n$

$I_n=[2x+e^{1-x}]_1^n=[2n+e^{1-n}]-[2+e^{1-1}]$

$I_n=[2x+e^{1-x}]_1^n=[2n+e^{1-n}]-[2+e^{1-1}]$

Posons $U_n=2n-3$ et $V_n=e^{1-n}$ .

On a $U_{n+1}=2(n+1)-3=2n-1$ , alors $U_{n+1}-U_n=2n-1-(2n-3)=2$ donc $(U_n)$ est une suite arithmétique de raison r =2 et de premier terme $U_1$ = 2.1-3 = -1.

$V_{n+1}=e^{1-(n+1)}=e^{-n}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{e^{-n}}{e^{1-n}}=\frac{1}{e}$ , donc $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{e}$ . Son premier terme est

$V_1=e^{-1}=\frac{1}{e}$