

EVALUATION ARITHMETIQUE et MATRICE

SUJET :

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres entiers définies par :

$$a_1 = 1, b_1 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ non nul } \begin{cases} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n \end{cases}.$$

1. Calculer a_2, b_2, a_3 et b_3 .

2. Donner M^2 .

Montrer que $M^2 = M + 2I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice identité d'ordre 3.

On admet que pour tout entier naturel non nul n , $M^n = a_n M + b_n I$, où (a_n) et (b_n) sont les suites précédemment définies.

3. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel non nul n , X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , $X_{n+1} = AX_n$.

b. Sans justifier, exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, X_n en fonction de A^{n-1} et de X_1 .

c. Justifier que P est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On note P^{-1} cette matrice.

d. Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

e. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

f. On admet que pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} + \frac{1}{3} \times (-1)^n \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} - \frac{2}{3} \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{3} \times (2^n + (-1)^{n-1})$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel k , $2^{4k} - 1 \equiv 0$ modulo 5.

5. Soit n un entier naturel non nul et multiple de 4.

a. Montrer que $3a_n$ est divisible par 5.

b. En déduire que a_n est divisible par 5.

Réponse :

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres entiers définies par :

$$a_1 = 1, b_1 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ non nul } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}.$$

1. $a_2 = a_1 + b_1 = 1 + 0 = 1$; $b_2 = 2a_1 = 2 \times 1 = 2$; $a_3 = a_2 + b_2 = 1 + 2 = 3$; $b_3 = 2a_2 = 2 \times 1 = 2$

2. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M + 2I$$

On admet que pour tout entier naturel non nul n , $M^n = a_n M + b_n I$, où (a_n) et (b_n) sont les suites précédemment définies.

3. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \neq 0$, X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a. $AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n \\ 2a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

b. On peut dire que $X_2 = AX_1$, $X_3 = AX_2 = A(AX_1) = A^2 X_1$, etc., donc que $X_n = A^{n-1} X_1$.

c. $\det(P) = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$ donc la matrice P est inversible.

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\bullet \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Donc l'inverse de la matrice P est la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1+1 & 1-2 \\ 2+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale appelée D .

e. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

• Initialisation

$$P^{-1}AP = D \text{ donc } PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1} \text{ autrement dit } A = PDP^{-1} \text{ soit } A^1 = PD^1P^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang $n = 1$.

• Hérédité

On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 1$, c'est-à-dire : $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A^{n+1} = A \times A^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PDPP^{-1}D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$

• Conclusion

La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc démontré que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

f. On admet que pour tout $n \geq 1$: $A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} + \frac{1}{3} \times (-1)^n \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} - \frac{2}{3} \times (-1)^n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = X_n = A^{n-1} X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} + \frac{1}{3} \times (-1)^n \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} - \frac{2}{3} \times (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc $a_n = \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} = \frac{1}{3} (2^n + (-1)^{n-1})$.

4. Soit k un entier naturel.

$2^4 = 16 \equiv 1$ modulo 5, donc $(2^4)^k \equiv 1^k$ modulo 5, donc $2^{4k} - 1 \equiv 0$ modulo 5.

5. Soit n un entier naturel non nul et multiple de 4 ; donc on peut écrire $n = 4k$.

a. $a_n = \frac{1}{3} (2^n + (-1)^{n-1})$ donc

$$3a_n = 2^n + (-1)^{n-1} = 2^{4k} + (-1)^{4k-1} = 2^{4k} + (-1)^{4k} \times (-1)^{-1} = 2^{4k} - 1 \equiv 0 \text{ modulo } 5.$$

Donc $3a_n$ est divisible par 5.

b. $3a_n$ est divisible par 5 donc 5 divise $3a_n$.

Or 3 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise a_n , ce qui veut dire que a_n est divisible par 5.