

EVALUATION GEOMETRIE

Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre. Cette île, étant le point de convergence de nombreuses tortues, des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données sur celles-ci.

Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 100 mètres.

Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x; y; z)$ avec $z < 0$ se situe dans l'océan.

La modélisation des spécialistes établit que :

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite

$$(D_1) \text{ dont une représentation paramétrique est : } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6t \\ z = -3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la

$$\text{droite } (D_2) \text{ dont une représentation paramétrique est : } \begin{cases} x = 10k \\ y = 2 + 6k \\ z = -4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.
- L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

a) Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix}$ est normal aux droites (D_1) et (D_2) .

- b) On admet que la distance minimale entre les droites (D_1) et (D_2) est la distance HH' où $\vec{HH'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ avec H appartenant à la droite (D_1) et H' appartenant à la droite (D_2) .

Déterminer une valeur arrondie en mètre de cette distance minimale.

On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel

► Calcul formel	
1	$\text{Résoudre}(\{10*k-3-t = 3*l, 2+6*k-6*t = 13*l, -4*k+3*t = 27*l\}, \{k, l, t\})$ $\rightarrow \left\{ \left\{ k = \frac{675}{1814}, l = \frac{17}{907}, t = \frac{603}{907} \right\} \right\}$

- Les scientifiques décident d'installer une balise en mer.

Elle est repérée par le point B de coordonnées $(2; 4; 0)$.

- Soit M un point de la droite (D_1) .

Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

- En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

Réponse :

- 1) On cherche le point d'intersection des deux droites (D_1) et (D_2) . On cherche t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+t=10k & (1) \\ 6t=2+6k & (2) \\ -3t=-4k & (3) \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+t=10k & (1) \\ 6t=2+6k & (2) \\ -6t=-8k & (3') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2k+2=0 & (2)+(3') \\ 3+t=10k & (1) \\ 6t=2+6k & (2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ t=7 & (2) \\ 6t=8 & (3) \end{cases} \text{ incompatibles.}$$

Il n'existe pas de point d'intersection aux droites (D_1) et (D_2) , les deux espèces ne se croisent pas avant d'arriver sur l'île.

- 2) a) Soit $u_1 = (1, 6, -3)$ un vecteur directeur de (D_1) et $u_2 = (10, 6, -4)$ un vecteur directeur de (D_2) .

Montrons que $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix} = 3 + 78 - 81 = 0, \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix} = 30 + 78 - 108 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est bien normal aux droites (D_1) et (D_2) .

- b) Comme $\overrightarrow{HH'}$ est colinéaire à $\vec{n}$, on a $\overrightarrow{HH'} = \ell \vec{n}$ avec $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{Comme H et H' appartiennent respectivement à } (D_1) \text{ et } (D_2): \overrightarrow{HH'} = \begin{pmatrix} 10k - 3 - t \\ 2 + 6k - 6t \\ -4k + 3t \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{HH'} = \ell \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 10k - 3 - t = 3\ell \\ 2 + 6k - 6t = 13\ell \\ -4k + 3t = 27\ell \end{cases} \text{ le logiciel formel nous donne : } \ell = \frac{17}{907}.$$

$$\text{La distance minimale est donc : } HH' = \frac{17}{907} \sqrt{907} = \frac{17}{\sqrt{907}} \approx 0,56 \text{ unités.}$$

Comme l'unité vaut 100 m la distance minimale est de 56 m.

- 3) a) On pose la fonction f telle que $f(t) = BM^2 = (3+t-2)^2 + (6t-4)^2 + (-3t)^2$

La distance entre BM est minimum si $f'(t) = 0$.

$$f(t) = t^2 + 2t + 1 + 36t^2 - 48t + 16 + 9t^2 = 46t^2 - 46t + 17.$$

$$f'(t) = 92t - 46 \text{ donc } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{46}{92} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Les coordonnées de } M_{\min} \text{ sont alors : } \left(\frac{7}{2}, -1, -\frac{3}{2} \right).$$

- b) La distance minimal vaut alors :

$$BM_{\min} = \sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{46 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 46 \times \frac{1}{2} + 17} = \sqrt{\frac{23}{2} - 23 + 17} = \sqrt{\frac{11}{2}} \\ \approx 2,35 \text{ unités}$$

Comme l'unité vaut 100 m la distance minimale est de 235 m.