Corrigé problème série A 2022

PROBLEME

$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$

1.Ensemble de définition D_f de f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \succ O\} \Rightarrow D_f =]0;+\infty[$

2.a) Calcul de limite

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty$

b) Interprétation du résultat

alors (C) de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

3 .a)On admet que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$

b) Interprétation du résultat

alors (C) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$

4. On montre que $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

On a : $f'(x) = 0 - \frac{x(\frac{1}{x}) - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

5. a) Résolution de l'équation $\ln x - 1 = 0$

$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$

b) Tableau de variation de f

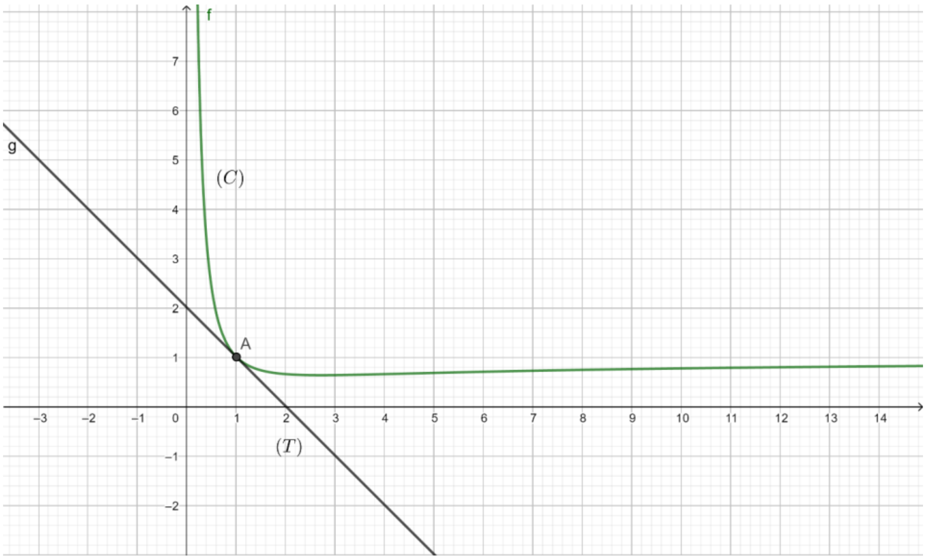
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0		
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(e) = \frac{e-1}{e}$	↗	1

6. Equation de la tangente (T) à (C) au point $x_0 = 0$

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = -1$ et $f(1) = 1$

$\Rightarrow (T): y = -x + 2$

7. Traçage de (C) et (T)



8. G est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $G(x) = x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

a. Montrons que G est une primitive de f

$$G'(x) = 1 - \frac{1}{2}(2\frac{1}{x}\ln x) = 1 - \frac{\ln x}{x} = f(x)$$

b. Calcul d'aire

$$A = \left|G(e) - G(1)\right| ua = \left|e - \frac{1}{2} - 1\right| cm^2 = 1,2cm^2$$

$$A = 1,2cm^2$$