

DEVOIR THEOREME GENERAUX SUR LES FONCTIONS

Exercice 1 :

Soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1$$

1. Montrer qu'il existe $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.
2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, en déduire que c_n est unique.

Exercice 2 :

Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que

$$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}$$

2. Soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$ telle que :

$$f(0) = 0; f(1) = 0; f'(0) > 0 \text{ et } f'(1) < 0$$

De plus on supposera que $\forall x \in]0,1[, f''(x) < 0$.

- 2.1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) > 0$.
- 2.2. Montrer que $f(\alpha) > 0$.
- 2.3. On suppose qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $f(\beta) = 0$, montrer qu'il existe $c_1 \in]0, \beta[$ et $c_2 \in]\beta, 1[$ tel que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$, en déduire une contradiction.
- 2.4. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.
3. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(xa + (1-x)b) - x \ln(a) - (1-x) \ln(b)$$

Montrer que f vérifie les hypothèses du 2 (En particulier on vérifiera que f est bien définie $[0,1]$. Puis que pour tout $x \in]0,1[$

$$\ln(xa + (1-x)b) > x \ln(a) + (1-x) \ln(b)$$