

EDUCMAD

Mathématiques seconde

Chapitre 1 - Logique et Algorithme

Activité – S’exprimer en Mathématiques

I. Objectifs

Connaitre les définitions du cours et s’exprimer en Mathématiques

II. Stratégie

Mettre à disposition de l’élève les connaissances à acquérir pour leur permettre de les découvrir et de s’en approprier à partir de situations diverses.

III. Quelques éléments de connaissances

1. Enoncé

Un énoncé est un assemblage de signes auxquels on a donné un sens.

Exemples :

Le soleil brille

La lampe est allumée

$5 < 7$

$8 + > 9$ n'est pas un énoncé car n'a pas de sens.

2. Proposition logique

Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux

Une proposition est une phrase déclarative qui est soit vraie, soit fausse (mais pas les deux). Une affirmation doit avoir l'une des deux valeurs de vérité possibles VRAIE ou Fausse

Remarque : Un énoncé dans la vie quotidienne qui peut être vrai ou faux en même temps n'est pas considéré comme une proposition logique.

Exemples :

A : « Le soleil brille » est un énoncé qui peut être vraie ou fausse suivant le cas. Ce n'est pas une proposition logique dans le sens mathématique. De même que la proposition « Bozy est belle » est discutable, ce n'est pas une vérité absolue !

B : « $5 < 7$ » est une proposition vraie

C : « $7 < 5$ » est une proposition fausse

D : « $x < 3$ » n'est pas une proposition logique complète car elle contient une variable libre x . x peut être supérieure ou égale à 3.

E : « $2^3 > 10$ » est une proposition fausse

F : « Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés de l'hypoténuse » est une proposition vraie

3. Négation d'une proposition

La **négation d'une** proposition P est la proposition notée (**non** P) ou $\bar{P}$ qui est VRAIE lorsque P est fausse et FAUSSE lorsque P est vraie.

La négation de P est définie à partir de sa table de vérité

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

4. Table de vérité

C'est une compilation sous la forme d'un tableau de tous les états logiques de la sortie en fonction des états logiques des entrées.

Exemple : Etablir la table de vérité des **conditions optimales pour obtenir un courant électrique** dans une installation photovoltaïque.

Proposition A : « Le soleil brille »

Proposition B : « Les panneaux photovoltaïque sont perpendiculaires aux rayons du soleil »

Proposition C : « L'onduleur est en état de fonctionnement »

Proposition D : « le courant électrique est dans les conditions optimales »

Attendu :

Table de vérité qui permet de conclure que les **conditions optimales** sont réunies **une seule fois parmi 6 états possibles** quand le soleil brille et les panneaux photovoltaïques sont perpendiculaires aux rayons du soleil et quand l'onduleur est en état de fonctionnement.

5. Connecteurs logiques « ET », « OU », « non »

A partir de propositions existantes et des expressions appelés connecteurs « et », « ou », « implique... », on peut obtenir de nouvelles propositions. Les propositions sont souvent notées P, Q R...

- La proposition « **P et Q** » veut dire : les propositions P et Q sont toutes les deux vraies. Elle est fausse dès que l'une au moins des deux propositions est fausse.

Remarque : en logique mathématique, les propositions « **P et Q** » et « **Q et P** » sont les mêmes !

- La proposition « **P ou Q** » veut dire : au moins l'une des propositions P ou Q est vraie.

Remarque : en logique mathématique, « P ou Q » ne veut pas dire « soit P, soit Q » mais « soit P, soit Q, soit les deux ».

- La proposition « **non p** » notée aussi $\bar{P}$ appelée négation de P, veut dire : « P est fausse »
- On peut combiner plusieurs expressions.

Exemple 1 : Etablir la table de vérité de « $\bar{P}$ ou Q »

La proposition « $\bar{P}$ ou Q » veut dire : « non P est vraie ou Q est vraie », c'est-à-dire « P est fausse ou q est vraie »

Elle est vraie dans 3 cas et fausse dans le quatrième cas possible.

6. Implication logique

La proposition « **si P, alors Q** » veut dire que, si P est vraie, alors Q aussi.

On dit aussi P implique Q ou encore, « pour que P soit vraie, il faut que q soit vraie ».

Notation $P \Rightarrow Q$ lorsque P et Q sont constituées de symboles mathématiques.

On peut demander : Etablir ici la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

7. Equivalence logique

La proposition $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$ se note $(P \Leftrightarrow Q)$. Elle est vraie si P et q sont toutes les deux vraies ou si P et q sont toutes les deux sont fausses.

On dit alors que les propositions P et Q sont équivalentes ou bien que P est vraie si et seulement si Q est vraie.

Questions à poser :

- Etablir ici la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$
- Compléter la proposition suivante : « ABC est un triangle équilatéral » $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ABC est isocèle} \\ \text{Un des angles mesure } 60^\circ \end{cases}$

8. Quantificateurs universels ($\forall$) et quantificateur existentiel ($\exists$)

Une proposition peut dépendre d'une variable ; dans ce cas, elle est vraie ou fausse selon les valeurs de cette variable.

Par exemple, si x est un nombre réel, la proposition « $x^2 - 4x + 4 < 0$ » n'est pas vraie pour toutes les valeurs de x

Une belle opportunité pour réviser les identités remarquables :

Factoriser le polynôme $x^2 - 4x + 4$

Résoudre l'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$

Factoriser le polynôme $x^2 - 4x + 4$

Trouver les valeurs de x qui vérifient la proposition « $x^2 - 4x + 4 < 0$ » .

Utiliser les terminologies « pour tout » ou « quel que soit » et « il existe »

IV. S'exprimer en mathématiques

On donne deux propositions

P : « le nombre n est pair »

Q : »le nombre n est multiple de 3

Question 1 : si n est pair et multiple de 3, citer 5 nombres de ce type, quel type de nombre est n ?

Question 2 : n est pair ou multiple de 3, citer 8 nombres de ce type.

Question 3 : que signifie : « le nombre n n'est pas pair » ($\bar{P}$) ?

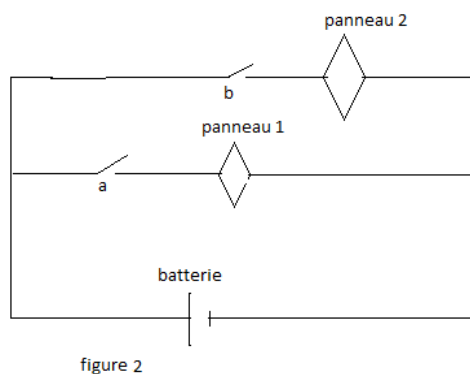
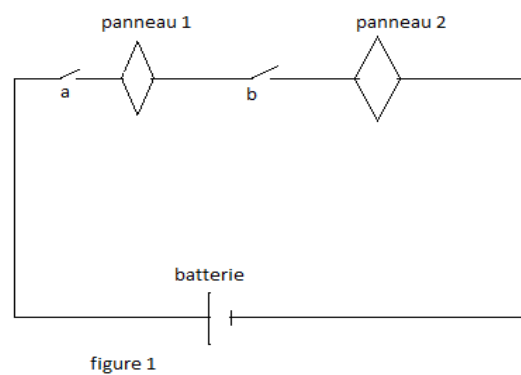
Question 4 : Etablir la table de vérité de « $\bar{P}$ ou Q »

Question 5 : Etablir ici la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

Question 6 : Etablir ici la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$

Question 7 : Compléter la proposition suivante : « ABC est un triangle équilatéral » $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ABC est ...} \\ \text{... .. } 60^\circ \end{array} \right.$

Question 8 : Soit les schémas simplifier d'installation photovoltaïque suivants



- a. Quelle est la différence entre l'installation des deux panneaux de la figure 1 et la figure 2
- b. D'après la figure 1 compléter la table de vérité suivantes par 1 ou 0

1 : fermé ou en charge

0 : ouvert ou n'est pas en charge

Interrupteur a	Interrupteur b	Batterie

- c. D'après la figure 2 compléter la table de vérité suivantes par 1 ou 0

1 : fermé ou en charge

0 : ouvert ou n'est pas en charge

- d. Quel connecteur logique est-il appliqué à chacun de ces deux installations afin de charger la batterie ?

Interrupteur a	Interrupteur b	Batterie

Question 9 : (c'est surtout de la révision et c'est un peu long, ce travail peut être à finir en devoir à la maison !)

- a. Factoriser le polynôme $x^2 - 4x + 4$
- b. Résoudre l'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$
- c. Factoriser le polynôme $x^2 - 4x + 4$
- d. Trouver les valeurs de x qui vérifient la proposition « $x^2 - 4x + 4 < 0$ »
- e. Utiliser les terminologies « pour tout » ou « quel que soit » et « il existe » pour résoudre cette inéquation